Dr. Helmut Heugl

DER EINFLUSS VON COMPUTERALGEBRASYSTEMEN AUF DAS LEHREN UND LERNEN VON MATHEMATIK

Österreich war zu Beginn der neunziger Jahre das erste Land der Welt, das die Generallizenz für ein Computeralgebrasystem (von nun an CAS genannt) für alle Gymnasien erwarb. Allerdings nützt es wenig, den Schulen nur Disketten und Handbücher zu schicken, es müssen auch die Konsequenzen eines derart mächtigen Hilfsmittels für das Lehren und Lernen von Mathematik untersucht und Unterrichtsmaterialien entwickelt werden.

Im Jahr 1993 wurde daher vom Bundesministerium für Unterricht ein Projekt mit diesen Zielen in Auftrag gegeben. In mehr als 30 Klassen in 3 Bundesländern wurde mit etwa 700 Schülern gearbeitet. Eine weitere Aufgabe war, in Zusammenarbeit mit dem Entwickler der des Softwarepaketes DERIVE, Prof. Stoutemyer aus den USA, an der Weiterentwicklung dieser Software mitzuarbeiten und zwar mit dem Ziel, eine bessere, schülergerechtere Verwendbarkeit im Unterricht zu erreichen.

Für die Einschätzung der im folgenden Kapitel beschriebenen Ergebnisse ist auch noch wichtig, zu erwähnen, daß es 3 verschiedene Typen von Klassen gegeben hat:

Typ I: Das CAS konnte in jeder Arbeitssituation genutzt werden, also auch zu Hause und auch in der Prüfungssituation. Damit war das CAS nicht nur als didaktisches Werkzeug, sondern auch als Rechenhilfsmittel von Bedeutung.

Typ II: Das CAS wurde regelmäßig, aber nicht in jeder Stunde, im EDV-Raum genutzt, vor allem aber nicht bei Schularbeiten. Somit stand die Nutzung als didaktisches Werkzeug im Vordergrund.

Typ III: Vergleichsgruppen, die ohne Nutzung des CAS unterrichtet wurden. Sie waren für Vergleichstests wichtig, vor allem zur Frage, ob sich in der Algebra die Kalkülkompetenz wesentlich verändert.

Man könnte sagen: Mit den Typ-II-Klassen wurde der Mathematikunterricht der Gegenwart untersucht, mit den Typ-I-Klassen der Mathematikunterricht der Zukunft.

Nun, etwa zwei Jahre später, liegen die ersten Ergebnisse vor. Es würde diesen Tagungsband sprengen, wollte man auf alle Aspekte des Einflusses von CAS auf den Mathematikunterricht eingehen. Daher habe ich mich auf ein Leitprinzip des zukünftigen Mathematikunterrichtes beschränkt, das WHITE BOX/BACK BOX PRINZIP. Als Beispiel habe ich ein sehr brisantes Thema gewählt, nämlich die Nutzung des CAS in der elementaren Algebra, beginned in der 7. und 8. Schulstufe.

DAS WHITE BOX/BLACK BOX PRINZIP in der ALGEBRA

1. BEGRIFFSKLÄRUNG

In impliziter Form wurde dieses Prinzip erstmals bei einem Minisymposium zum Thema "Symbolic Math in Education" konstruiert, das im Rahmen der ICME-Konferenz 1984 in Adelaide stattfand. Explizit formulierte es Prof. Bruno Buchberger, Vorstand des RISC-Instituts an der Universität Linz (Research Institut for Symbolic Computation) in einer Arbeit im Jahr 1990. Experten erkennen in diesem Prinzip sicher auch deutliche Elemente des Spiralprinzips, aber das Besondere an diesem neuen Prinzip ist, daß eine sinnvolle Realisation dieses didaktischen Konzeptes erst bei Nutzung des Computers und insbesondere eines CAS möglich ist.

Viele Bereiche der Schulmathematik wurden in letzter Zeit in folgendem Sinn "trivialisiert": Der benötigte Algorithmus kann von Maschinen bearbeitet werden. Es ergibt sich daher die Frage, ob man den Schüler dann noch mit diesen Problemen quälen soll, oder ob man nicht besser Maschinen zur Verfügung stellen soll, die die passenden Algorithmen beherrschen [BUCHBERGER, 1992].

In der Diskussion über Segen oder Fluch des Einsatzes von Computern und insbesondere von CAS beobachtet man oft zwei extreme Positionen:

Die "Traditionalisten": Der Computer ist eine Gefahr für die mathematische Kultur. Das blinde Verwenden von Werkzeugen verhindert das Verstehen mathematischer Konzepte. "Basteln" ist kein brauchbarer Ersatz für die "Anstrengung des Begriffserwerbs".

Die "Progressiven": Verlieren wir doch keine wertvolle Unterrichtszeit mit Tätigkeiten, die die Maschine besser beherrscht. Warum soll der Schüler einen Algorithmus herleiten oder verstehen können, wenn es eine soLve-Taste gibt? Wir würden mehr Raum für "kreatives Problemlösen" bekommen.

Wie so oft taugen Extreme nichts. Der sinnvolle Konsens zwischen den beiden extremen Standpunkten lautet: **"WHITE BOX/BLACK BOX PRINZIP"**.

Es handelt sich dabei um ein rekursives Modell des Unterrichtes, das jeweils in zwei Phasen abläuft:

White Box Phase: Phase des verstehenden Lernens

Die Schüler sollen (genetisch oder nach einem wissenschaftsorientierten Ansatz) zu einem Begriff, einem Algorithmus, einem mathematischen Konzept geführt werden. Die in dieser Phase entwickelten Operationen sollen ohne Verwendung des Computers, also "zu Fuß", vom Schüler ausgeführt werden können. Grundtätigkeiten sollen durch Übung automatisiert werden.

Der Computer soll nur dort verwendet werden, wo Bereiche früherer White Box-Phasen als Black Box genutzt werden, oder allgemeiner, wo er zur Erhellung der aktuellen White Box beitragen kann.

Mögliche Aktivitäten in der White Box Phase:
Formulieren eines Problems; Finden einer Vermutung; Entwickeln eines Begriffes; Entwickeln eines Algorithmus; Beweisen; Rechnen ausreichend vieler Übungsaufgaben ohne CAS; Nutzen von Black Boxes, die in früheren White Boxes entwickelt wurden; Diskussion der Lösungsfälle, der Grenzen und der Verallgemeinerungsmöglichkeiten der Methode; eigenständiges Entwickeln von Modulen, die in der Black Box Phase als Black Boxes genutzt werden können.

Black Box Phase: Phase des erkennenden und begründenden Anwendens

Der Schüler soll die in der White Box Phase entwickelten Algorithmen und Konzepte bei praktischen Problemen oder bei weiteren White Box Phasen passend einsetzen.
Das Bearbeiten des Algorithmus wird dem Computer als Black Box überlassen.
Der Schüler soll entscheiden, was zu tun ist, eventuell seine Entscheidung auch begründen, er muß es aber nicht mehr selbst tun.

Die REKURSIVITÄT besteht darin, daß man während einer bestimmten White Box Phase Bereiche, die in einer in der Hierarchie niedrigeren White Box Phase verstehend gelernt und entwickelt wurden, als Black Boxes nutzt usw. Das Gebäude der Mathematik entwickelt sich somit als ein System ineinandergeschachtelter White und Black Boxes.

Wenn dieser Aufbau gelingt, ist die Sorge mancher Mathematiker unbegründet, Computernutzung würde nur mehr ein unreflektiertes, irgenwann automatisiertes Nutzen von Black Boxes bedeuten, und viele wichtige mathematische Inhalte würden bedeutungslos. Im Gegenteil! Leider erlebt man im traditionellen Mathematikunterricht, in dem Rechenfertigkeiten oft sehr stark im Mittelpunkt stehen, viel mehr unreflektierte Black Boxes, als man glaubt. Alle Schüler wissen zwar in der Differentialrechnung, daß "x5 zu 5.x4 wird", aber nur wenige können den Begriff des Differentialquotienten erklären oder deuten oder die Regeln herleiten. Unsere Untersuchungen haben gezeigt, daß bei Nutzung von CAS mehr Raum für White Box Phasen bleibt und die Schüler besser zum eigenständigen Lernen in dieser Phase angeleitet werden können. Das CAS macht also wichtige mathematische Inhalte bei Beachtung dieses

Prinzips nicht überflüssig. Entlastet wird der Schüler aber bei komplexen Operationen in der Phase der Anwendung des bisher Gelernten, da das CAS dafür Black Boxes anbietet.

Natürlich sollten nicht alle im Sinne dieses Prinzips verwendeten Black Boxes "absolut schwarze Körper" sein (siehe dazu: Modul Prinzip). Wenn der Schüler seine Entscheidung für eine Black Box begründen, oder die Ergebnisse der Black Box interpretieren soll, muß dafür gesorgt werden, daß eine gewisse "White-Box-Kompetenz" erhalten bleibt, wie z. B.: elementare Rechenfertigkeit in der Algebra, Strukturerkennungskompetenz, Definition verwendeter Begriffe, Wissen um mögliche Lösungsfälle usw. Diese Kompetenz wird nicht ganz von selbst erhalten bleiben, sondern muß vom Lehrer im Sinne des didaktischen Prinzips der "Stabilisierung" oder im Sinne des "Spiralprinzips" immer wieder gefördert und gefordert werden.

Unser ursprünglicher didaktischer Ansatz war anders: In der White Box Phase sollte der Computer nicht verwendet werden. Die Konsequenzen für die Algebra wären gewesen, daß der Computer frühestens in der 9. Schulstufe eingesetzt würde und daß die elementare Algebra in der 6. und 7. Schulstufe "CAS-frei" wäre. Durch die Experimente in Versuchsklassen der Stufen 6 und 7 haben wir unsere Meinung grundlegend geändert: Es hat sich gezeigt, daß das CAS viele Hilfen bietet, um die Boxes der elementaren Algebra "white" zu machen. Ein Großteil der Beispiele im folgenden Artikel wurde im Rahmen der Experimente in den Versuchsklassen am Gymnasium Stockerau von G. Razenberger und W. Klinger entwickelt. Eine Sammlung von Aufgaben für die 7. bis 12. Schulstufe, die im Rahmen des österreichischen Derive-Projektes in Versuchsklassen erprobt wurden, wurde als ACDCA-Report Nr. 2 von den Projektlehrern K. Aspetsberger, K. Fuchs und W. Klinger veröffentlicht [ASPETSBERGER, 1994]

2. EINTEILUNG DES ALGEBRALERNENS IN AUFEINANDERFOLGENDE WHITE UND BLACK BOXES:

WHITE BOX	Genutzte BLACK BOXES
WHITE BOX 1: "Termbox" Aufstellen von Termen. Bearbeiten von Termen. Rechnen mit Termen.	Nutzen des CAS zum Testen und Üben
WHITE BOX 2: "Gleichungsbox" Entwickeln von Strategien zum Lösen von Gleichungen. Äquivalenzumformungen.	BLACK BOX: "Termbox" Die Termumformungen übernimmt das CAS als Black Box.
WHITE BOX 3: "Gleichungssysteme" Entwickeln von Strategien zum Lösen von Gleichungssystemen.	BLACK BOXES: "Termbox" "Gleichungsbox" Das Termumformen und das Lösen einzelner Gleichungen übernimmt das CAS als Black Box
WHITE BOX 4: "Anwendungsbox" Nutzen der Algebrakenntnisse beim Problemlösen. White Box - Aktivitäten: Modellbilden, Interpretieren	BLACK BOXES: "Termbox" "Gleichungsbox" "Gleichungssysteme" "Differentialrechnungsbox" usw. Das Operieren übernimmt das CAS als Black Box.

2.1. DIE TERMBOX

Wie Roland Fischer in seinem Buch *"Mensch und Mathematik"* [FISCHER, 1985, S 47ff] ausführt, hat die elementare Algebra sowohl einen formalen als auch einen inhaltlichen Aspekt. Mathematik lebt einerseits von der Trennung andererseits von der Verknüpfung dieser Aspekte. Auch wenn die temporäre Trennung des Formalen vom Inhaltlichen eine charakteristische Methode der Mathematik und eine ihrer Stärken ist, so muß doch kritisiert werden, daß ein Kennzeichen der klassischen Schulmathematik eine Überbetonung des formalen Aspektes und die fehlende Verknüpfung mit dem inhaltlichen Aspekt ist.

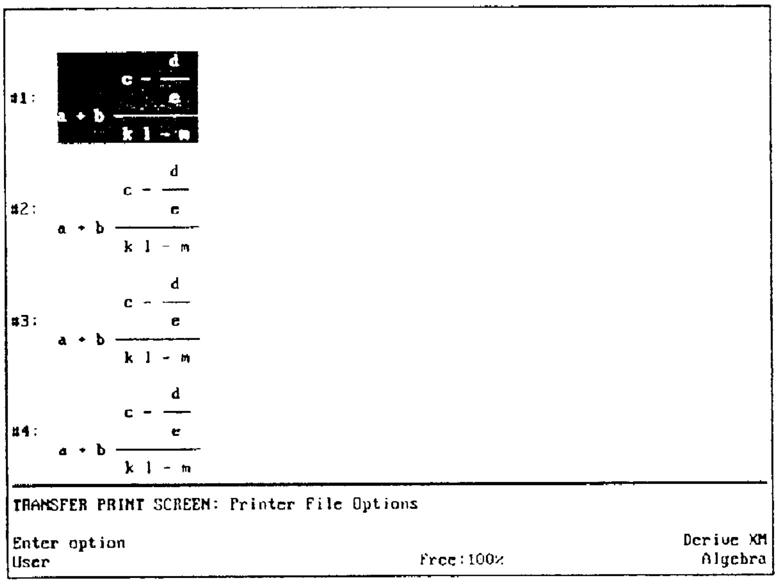
Die Verwendung von CAS bietet die Chance, den Lernenden im formalen Bereich Tätigkeiten abzunehmen, durch Experimentieren und Testen mehr Verständnis zu erreichen und somit Kapazitäten für den inhaltlichen Bereich und für die Verknüpfung des Formalen mit dem Inhaltlichen freizumachen.

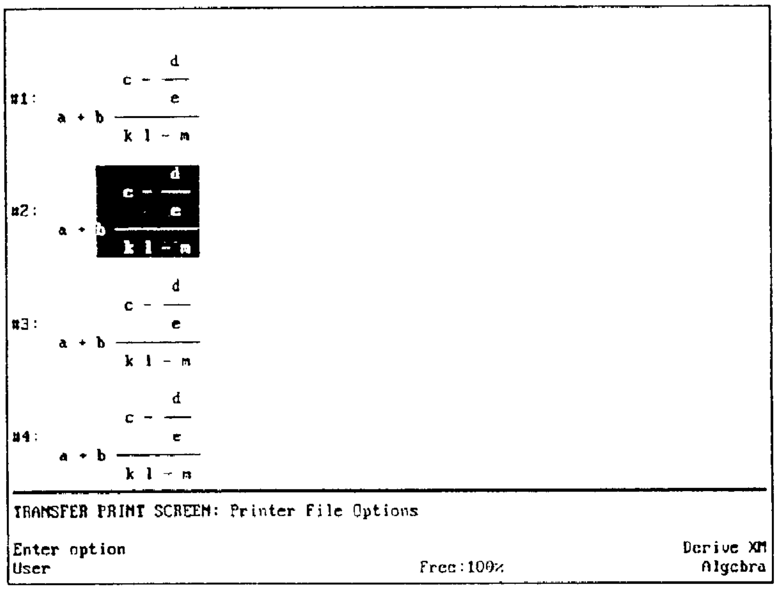
BEISPIELE:

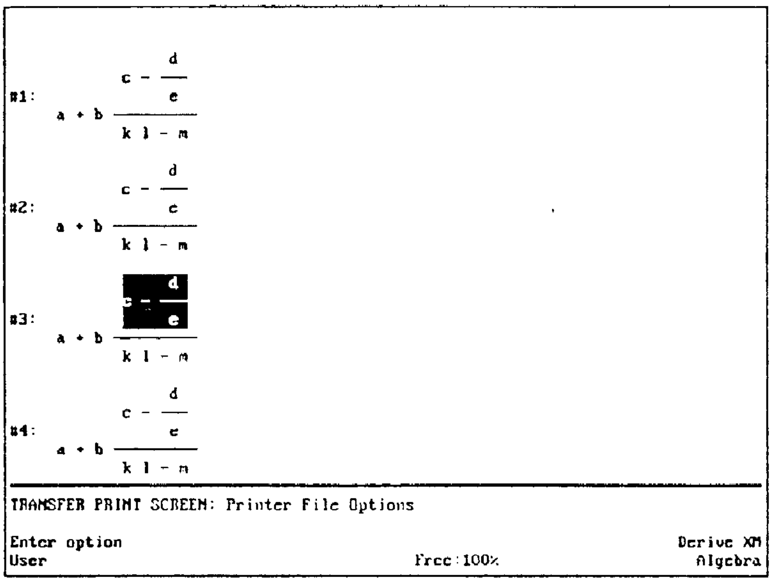
Struturerkennungsübungen

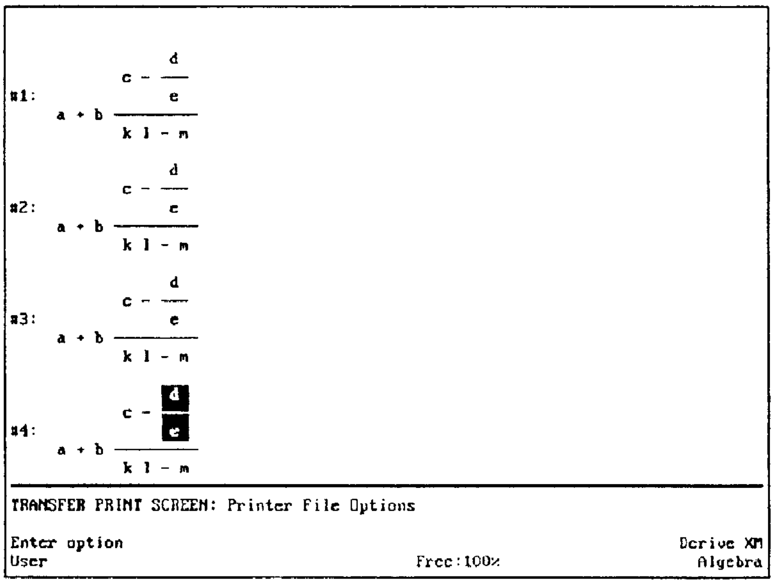
Verschiedene Untersuchungen, insbesondere die von Günther Malle [FISCHER, 1985, S 59ff] bestätigen, daß zu den häufigsten Fehlerquellen beim Termrechnen Strukturerkennungsfehler gehören. Durch das Arbeiten mit dem CAS gewinnt die "Strukturerkennungskompetenz" noch mehr an Bedeutung, da der Schüler vom Ausfüherer zum Planer wird, sich also aufgrund der erkannten Termstruktur für eine Lösungsstrategie entscheiden muß, bzw. basierend auf seinem Wissen um Termstrukturen einen Term entwikeln muß. Die bisher durch intensives Üben von Rechenfertigkeiten erworbene implizite Strukturerkennungskompetenz ist aber nach Zurücknahme des Rechendrills nicht mehr gegeben (oder war, wie viele Untersuchungen zeigen gar nie vorhanden), daher muß man die Möglichkeiten des CAS zum Erwerb dieser Kompetenz nutzen.

Eine Möglichkeit ergibt sich bei DERIVE durch Markieren von logisch korrekten Teiltermen mit Hilfe der Cursorsteuerung. Der Schüler kann durch experimentelles Arbeiten den Aufbau des Terms erforschen und durch eine größere Zahl an Übungsaufgaben, die etwa vom Lehrer vorgegeben sind, diese Strukturerkennungskompetenz verbessern.









Didaktisch gesehen empfiehlt sich, die Terme nicht in einem File anzubieten, sondern vom Schüler selbst eingeben zu lassen. Aus der Not der linearen Eingabe wird dabei insofern eine Tugend, als der Schüler schon vor der Eingabe eine Strukturentscheidung treffen muß. Während er bei der Eingabe in einen numerischen Taschenrechner seine Strukturerkennungsfehler nicht mehr entdeckt, sieht er bei der Eingabe in DERIVE sofort die falsche Struktur. Eine weitere bewährte Begleitmaßnahme, die das verstehende Lernen fördert und eine Verküpfung zwischen der 'Strukturerkennungskompetenz' und der 'Grundgesetzerkennungskompetenz' herstellt, ist der Auftrag, die beim Eindringen in die Termstruktur auftretenden Rechengesetze und Grundgesetze als Begründung anzugeben.

Termumformungen

Der Vorteil des CAS in der White Box Phase besteht darin, daß der Schüler selbsttätig Bearbeitungstechniken erforschen und individuelle Techniken entwickeln kann. Folgende Techniken werden bei der Nutzung des CAS eingesetzt:

* Unterlegen von Ausdrücken und Teilausdrücken (mit den Cursortasten im Algebrafenster).
* Anwenden von Befehlen auf Ausdrücke und Teilausdrücke (**Simplify, Factor, Expand**).
* Ersetzten komplizierterer Ausdrücke durch einfachere (**Manange Substitute**).
* Rückführen von vereinfachten Ausdrücken in die komplexe Form (**Manage Substitute**).

Beispiel: Umformen in ein Produkt ("Faktorisieren")

Install Equation Editor and double-click here to view equation.

Im Sinne des Black Box/White Box Prinzip könnte der Schüler die Aufgabe zuerst dem Computer übertragen und das CAS als Black Box nutzen:

```
#1:  InputMode := Word
#2:  CaseMode := Sensitive
                     2            2
#3:  (3 m + 1)  - (2 m - 3)
```

Mit **Factor** entsteht folgender Ausdsruck:

```
#4:  (m + 4) (5 m - 2)
```

Nun versucht der Schüler, die Black Box "white" zu machen. Die erste Tätigkeit ist eine Strukturerkennung. Der gegebene Term scheint die Struktur des Typs a2 - b2 zu haben. Mit **Mange Substitute** wird nun der erste Klammerausdruck durch die Variable AUSDRUCK1 ersetzt.

```
                2           2
#5:  AUSDRUCK1  - (2 m - 3)
```

Nun wird (2 m - 3) unterlegt und durch AUSDRUCK2 ersetzt.

```
                2           2
#6:  AUSDRUCK1  - AUSDRUCK2
```

Mit **Factor** wird folgende Formel angewendet: a2 - b2 = (a + b)(a - b)

```
#7:  (AUSDRUCK1 + AUSDRUCK2) (AUSDRUCK1 - AUSDRUCK2)
```

Die Ausrücke aus #4 werden wieder substituiert.

```
#8:  ((3 m + 1) + (2 m - 3)) ((3 m + 1) - (2 m - 3))
```

Durch schrittweise Vereinfachung mit **Simplify** entsteht:

```
#9:  (5 m - 2) ((3 m + 1) - (2 m - 3))

#10: (5 m - 2) (m + 4)
```

Jetzt müßten natürlich ausreichend viele Übungen zur Festigung des Gelernten eingesetzt werden, wobei das CAS den Vorteil bietet, daß in kuzer Zeit viele solcher Beispiele geübt werden können und daß das CAS zum Testen und für Proben genutzt werden kann.

Beispiel: Anwenden von Formeln
Übungen zum Lernziel: Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat.

Es geht in dieser Lernsequenz um die folgenden Formeln:

#1: $(u + v)^2 = u^2 + 2\,u\,v + v^2$ User

#2: $(u - v)^2 = u^2 - 2\,u\,v + v^2$ User

#3: $u^2 - v^2 = (u + v)\,(u - v)$ User

auf Arbeitsblättern werden den Schülern folgende Aufgaben gestellt, die sie dann mit dem CAS durch experimentelles Lernen lösen sollen:

Ermittle a,b,c so, daß eine der obigen Formeln paßt:

#4: $4\,x^2 + a + 25 = (b + c)^2$ User

Mit Hilfe von **Manage Substitute** werden die Variablen durch die vermuteten Ausdrücke erstezt. Natürlich geht es bei selbständigem Arbeiten nicht so rasch wie hier, aber gerade die Möglichkeit des Fehlersuchens mit dem CAS, das Diskutieren über Strategien, das Finden eigener Strategien ist in der Art und Weise nur mit dem CAS möglich und rechtfertigt den Einsatz in der White Box Phase.

#5: $4\,x^2 + 20\,x + 25 = (2\,x + 5)^2$ Sub(#4)

Einige Testmöglichkeiten: Faktorisieren des linken Ausdrucks

#6: $(2\,x + 5)^2 = (2\,x + 5)^2$ Fctr(#5')

oder Lösen der Gleichung nach der Variablen x

#7: x = @1 Solve(#6)

Natürlich sollte man auch Aufgaben stellen, die nicht so reibungslos funktionieren:

#13: $4\,x^2 + 2\,x\,y + a = (b + c)^2$ User

#14: $4\,x^2 + 2\,x\,y + y^2 = (2\,x + y)^2$ Sub(#13)

Die Testmöglichkeiten mit **Factor** oder **Expand** zeigen, daß die Vermutung falsch ist:

$$\#15:\ 4 x^2 + 2 x y + y^2 = (2 x + y)^2$$ Fctr(#14)

$$\#16:\ 4 x^2 + 2 x y + y^2 = 4 x^2 + 4 x y + y^2$$ Expd(#15')

Das CAS hilft, die richtige Lösung zu finden:

$$\#17:\ 2 x y = 2 (2 x) c$$ User

$$\#18:\ c = \frac{y}{2}$$ Solve(#17)

Man beobachtet wieder: Die Haupttätigkeit des Lernenden besteht im Formulieren von Vermutungen und im Testen.

$$\#19:\ 4 x^2 + 2 x y + \frac{y^2}{4} = \left[2 x + \frac{y}{2}\right]^2$$ Sub(#13)

$$\#20:\ 4 x^2 + 2 x y + \frac{y^2}{4} = 4 x^2 + 2 x y + \frac{y^2}{4}$$ Expd(#19)

2.2. DIE GLEICHUNGSBOX

Wenn man im Sinne des von Roland Fischer [FISCHER, 1985, S 63ff] vorgeschlagenen Weges in den Schulstufen 5 und 6 den Formalismus des Gleichungslösens vorsichtig aus inhaltlichen Überlegungen heraus entwickelt hat, so ist es spätestens in der 7. Schulstufe notwendig, jenen Schritt zu tun, der eine der großen Stärken der Mathematik ist, nämlich die Trennung des Formalen vom Inhaltlichen. Ich halte dabei die Idee der Äquivalenzumformung nach wie vor für die wirkungsvollste Strategie, weil sie für die Schüler eine weit über das Lösen linearer Gleichungen hinaus bedeutsame heuristische Strategie darstellt (*"Unter Einhaltung bestimmter Spielregeln auf beiden Seiten dasselbe tun"*).

Die große Chance, die sich aus der Verwendung von CAS ergibt, besteht darin, daß der Schüler seine individuellen Strategien durch experimentelles Lernen selbst entdecken kann. Untersucht man Schülerfiles, so kann man selbst in der Prüfungssituation erkennen, daß von einem "algorithmischen Gehorsam", wo jeder Schüler den vom Lehrer vorgestellten Weg nachvollzieht, bei Einsatz des CAS nichts mehr zu sehen ist.

Einsatzmöglichkeiten des CAS in der "Gleichungs-White-Box":

* Schrittweise Durchführung von Umformungen. Dabei können die beiden Seiten der Gleichung entweder einzeln oder gleichzeitig bearbeitet werden. Bei DERIVE kann die Gleichung oder Teile davon mit F3 oder F4 in den Editor geholt und bearbeitet werden.

* Analyse und Interpretation der dabei entstehenden neuen äquivalenten Gleichung. Eventuell Rückführen in die ursprüngliche Form als Probe.

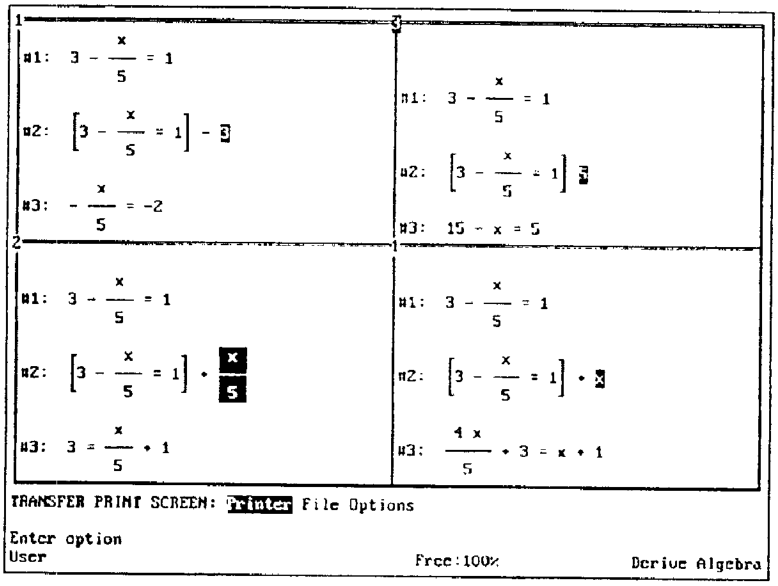
* Vergleichen verschiedener Äquivalenzumformungen, Finden der individuell am geeignetsten Strategie. Erkennen falscher bzw. unwirksamer Strategien.

* Ständiges begleitendes Testen, Probe durch Einsetzen vermuteter Lösungen ohne großen Rechenaufwand.

* Herstellen einer Querverbindung zum Funktionsbegriff: Visualisierung der Äquivalenzumformung. Veranschaulichen der Konsequenz nicht äquivalenter Umformungen.

BEISPIEL: Vergleichen von Umformungsstrategien

Die Window Shuttle Methode erlaubt noch dazu das parallele Arbeiten in verschiedenen Fenstern, in diesem Fall das Vergleichen der Wirksamkeit verschiedener Lösungsstrategien.

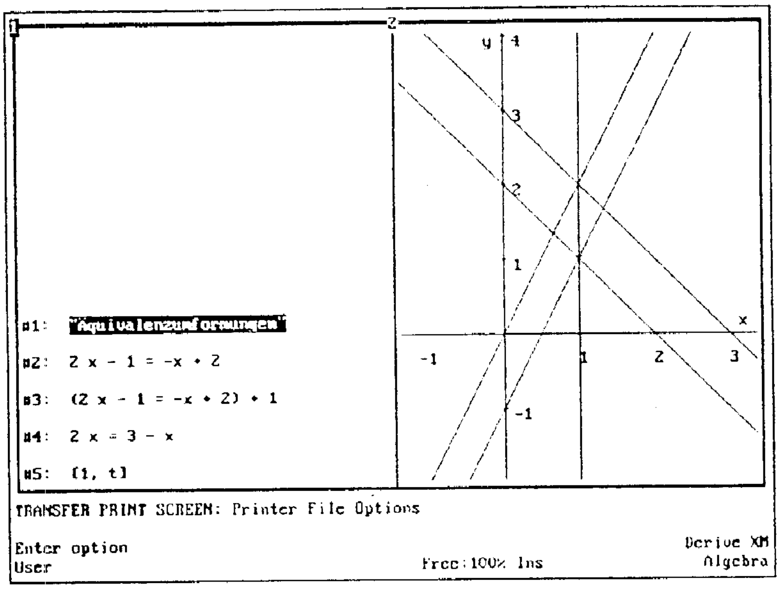


Wie im Fenster 4 zu sehen ist kann der Schüler auch die Unwirksamkeit falscher Strategien erkennen, was er beim Arbeiten auf Papier wahrscheinlich nicht bemerken würde. Dort führt z.B.: bei der Gleichung $3.x = 12$ die Strategie *"auf beiden Seiten 3 subtrahieren"* zum falschen Ergebnis $x = 9$, beim Arbeiten mit dem CAS dagegen zu $3.x - 3 = 9$.

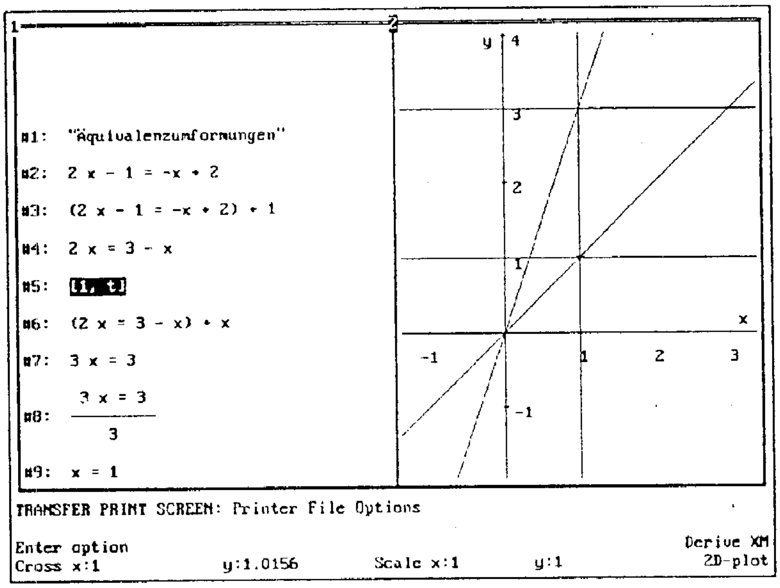
BEISPIEL: Visualisierung von Äquivalenzumformungen.

Deutet man eine Gleichung der Form $L(x) = R(x)$ als Schnitt zweier Funktionen L und R, so kann man durch "Shutteln" zwischen einem Algebra- und einem Graphikfenster die Konsequenzen von Äquivalenzumformungen beobachten.

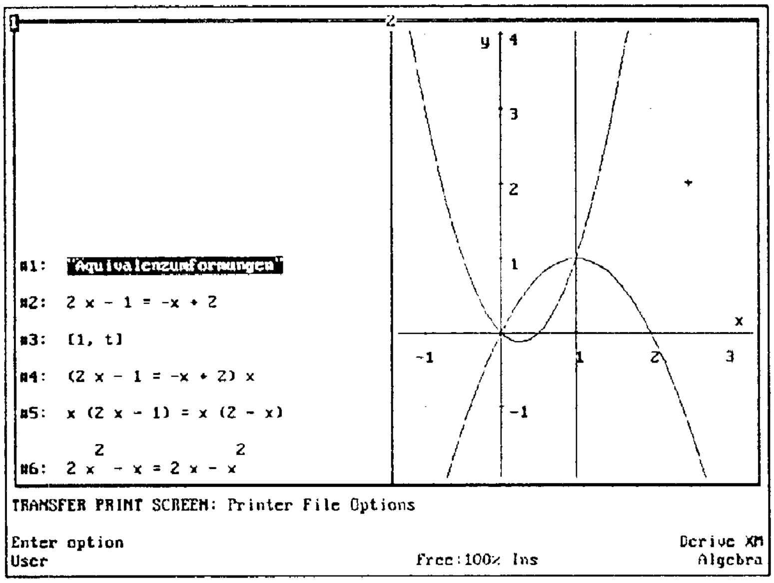
Durch die Beobachtung gemeinsamer Eigenschaften der Graphen der Zeilen #2 und #4 der folgenden Abbildung kommt man zum Schluß: Der Schnitt erfolgt stets an der Stelle $x=1$. Die Überprüfung erfolgt durch Zeichnen von [1,t] (siehe Zeile #5).

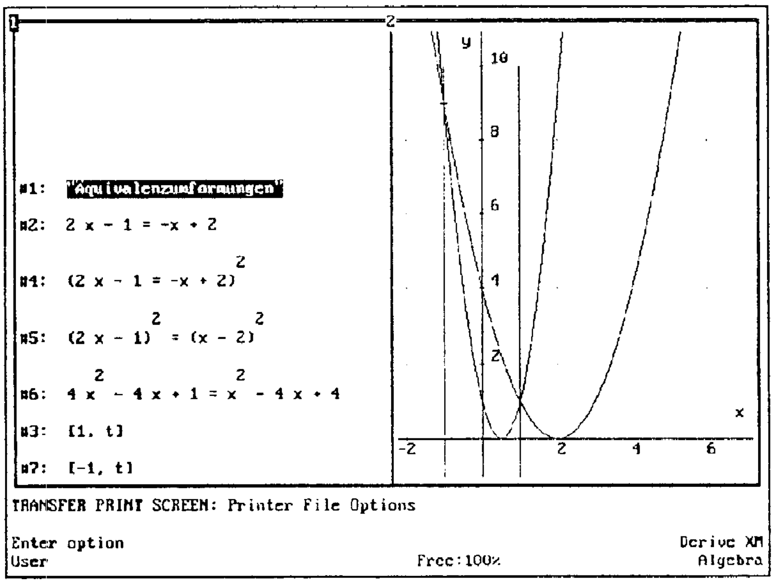


Im Algebrafenster könnte man dann noch die Probe für die aus dem Graphikfenster gewonnene Vermutung machen. Bei weiteren Äquivalenzumformungen kommt man zum selben Ergebnis:



Auch die Folgen nicht äquivalenter Umformungen können im Graphikfenster beobachtet werden, wie etwa die Multiplikation mit x oder das Quadrieren der Gleichung.





Von didaktischer Bedeutung ist bei dieser Vorgangsweise auch die bei den neuen DERIVE-Versionen mögliche "Lehrerschnittstelle":

Der Lehrer kann das Menü auf die Lernentwicklung der Schüler abstimmen und entscheidet, welche Einstellungen im Hauptmenü aufscheinen. So bietet man in der White Box Phase der elementaren Algebra etwa nur die Befehle Simplify, Expand, Factor, Manage Substitute, Approx und Plot an, nicht aber soLve. An manchen Schulen, die am CAS-Projekt beteiligt sind, gibt es im Netz des EDV-Raumes schon Menüvoreinstellungen für die einzelnen Lernstufen von der 7. bis zur 12. Schulstufe.

2.3. DIE BOX: GLEICHUNGSSYSTEME

Im Sinne des White Box/Black Box Prinzips sollten in der White Box Phase folgende Ziele angestrebt werden:

Den Begriff des linearen Gleichungssystems erläutern können. Den Begriff der Lösungsmenge erläutern und verschiedene Lösungsmengen deuten können.

Lösungsalgorithmen entwickeln und erklären können.

Die entwickelten Algorihmen für einfache Fälle "zu Fuß", d.h. ohne Computereisatz anwenden können.

Modellbilden:, Gleichungssysteme aufstellen können.

Lösungsmengen interpretieren können.

Den Lösungsalgorithmus des CAS anwenden können.

Lineare Gleichungssysteme in der 8. Schulstufe:

Natürlich kann man die üblichen Lösungsalgorithmen, wie etwa die graphische Lösung, das Einsetzungs- oder das Gleichsetzungsverfahren usw. auch an Hand einfacher Beispiele "zu Fuß" behandeln. Hier sollen an Beispielen einige Argumente angeführt werden, die für den Einsatz von CAS auch in dieser Phase sprechen.

Graphisches Lösen:

Behandeln vieler Aufgaben in relativ kurzer Zeit. Konzentrieren auf das Wesentliche des Lösens, Untersuchen verschiedener Lösungsfälle. Keine Ablenkung durch Nebentätigkeiten, wie Aufstellen von Wertemengen. Experimentelles Entdecken der Lösung durch "Wandern auf den Geraden im *Trace*-Modus von DERIVE". Nutzen der Möglichkeit des *Zoomens*. Gemäß der Window Shuttle Methode: Pendeln zwischen dem Algebra- und Graphikfenster; Beobachten von Konsequenzen algebraischer Operationen im Graphikfenster.

Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren):

```
#1:   3.x - y = 5                                   User

#2:   2.x + 3.y = 7                                 User
```

Die Auflösung der Gleichung #1 nach y erfolgt mit dem CAS als Black Box.

```
#3:   y = 3.x - 5                                   Solve(#1)
```

Die Tätigkeit des Substituierens wird durch die Nutzung der entsprechenden DERIVE-Optionen, wie etwa das Verwenden von **Manage Substitute**, bewußt wahrgenommen. Der Schüler entscheidet die Operation, führt sie aber selbst nicht aus.

```
#4:   2.x + 3.(3.x - 5) = 7                         Sub(#2)
```

Wieder übernimmt das CAS Lerninhalte früherer White Boxes als Black Box

```
#5:  x = 2                                   Solve(#4)

#6:  y = 3.2 - 5                               Sub(#3)

#7:  y = 1                                    Simp(#6)
```

Gleichsetzungsverfahren:

```
#1:  3.x - y = 5                                  User

#2:  2.x + 3.y = 7                                User

#3:  y = 3.x - 5                             Solve(#1)

             7 - 2.x
#4:  y = ---------                          Solve(#2)
                3
```

Das bewußt durchgeführte "gleich - Setzen" erfolgt bei DERIVE durch Verwendung der Funktionstasten F3 bzw. F4, mit denen markierte Ausdrücke in die AUTHOR-Zeile kopiert werden können. Dadurch wird die neue Gleichug durch Gleichsetzen zweier Terme "gebaut". Das Lösen dieser Gleichung könnte im Sinne des White Box/ Black Box Prinzips vom CAS als Black Box übernommen werden. Eine andere Möglichkeit wäre die Verwendung des Build-Befehles, dessen Name schon seine Möglichkeiten beschreibt.

```
                       7 - 2.x
#5:  3.x - 5 = ---------                          User
                          3

#6:  x = 2                                   Solve(#5)

#7:  y = 3.2 - 5                               Sub(#3)

#8:  y = 1                                    Simp(#7)
```

Additionsverfahren ("Vorform" des Gaußschen Eliminationsverfahrens):
Wie schon in der Gleichungsbox ausgeführt könnte sich der Schüler auf das Entscheiden der Strategie konzentrieren und die Ausführung der Äquivalenzumformungen der beiden Gleichungen dem CAS überlassen.

Lösen mit dem CAS:
Bei Verwendung von DERIVE wird das Gleichungssystem als Vektor eingegeben. Mit **soLve** erhält man sofort die gesuchte Lösung.

Lineare Gleichungssysteme in der 10. Schulstufe

Daß eine Box, die in der 8. Schulstufe einmal "white" war, danach nicht für immer "black" bleiben muß, oder anders gesagt nicht für immer "black" bleiben soll, wurde im Vortrag von Herrn Lehmann [LEHMANN,1995] sehr eindrucksvoll verdeutlicht. In Österreich steht im Lehrplan der 10. Schulstufe des Realgymnasiums das Thema Matrizen. Bis jetzt wurde es sehr stiefmütterlich behandelt. Durch Nutzung des CAS könnte dieses Kapitel einen wesentlich höheren Stellenwert bekommen, da die aufwendige Rechenarbeit beim Rechnen mit Matrizen das CAS übernehmen könnte. Zusätzlich kann, wie von Herrn Lehmann gezeigt, dieses Kapitel für eine "White Box Phase" zum Erforschen des Gaußschen Eliminationsverfahrens genutzt werden. Diese Behandlung des Themas "Lösen von Gleichungssystemen" in verschiedenen Altersstufen auf verschiedenen Exaktheitsniveaus kann auch als schönes Beispiel der Realisierung des Spiralprinzips verwendet werden.

Entsprechend der am Beginn des Kapitels 2.3 formulierten Grobziele wären die Feinziele dieser White Box Phase:

Kenntnisse über das Rechnen mit Matrizen beim Lösen von Gleichungssystemen anwenden können.

Die Zielsetzung des Gauß Algorithmus erläutern können und die Lösung schrittweise mit Hilfe von DERIVE-Operationen für Matrizen berechnen können. Zwischenergebnisse deuten können. Die Auswirkung der DERIVE-Befehle und den dazugehörigen Algorithmus deuten können.

Die Umformung des Gleichungssystems mit dem DERIVE-Befehl **row_reduce** durchführen können.

Das bei den "Gaußschen" Umformungen entstehende Endschema auswerten können.

Das Ablesen der Lösungsmenge aus dem Endschema begründen können.

2.4. DIE ANWENDUNGSBOX

In dieser Box ist das Thema der White Box: Schulung des Problemlösens. Dabei können die in früheren White Box Phasen erworbenen Kenntnisse im Bereich von Algebra oder Analysis unter Nutzung das CAS als Black Box eingesetzt werden. Bisher war in der Anwendungsphase (sofern sie überhaupt vorhanden war) der Schwerpunkt der Schülertätigkeit das Rechnen. Nun kann gerade das **Operieren** dem CAS übertragen werden und das **Modellbilden** sowie das **Interpretieren** gewinnen an Bedeutung.

BEISPIEL

Eine klassische Aufgabe in traditionellen Schulbüchern:

Von einer Polynomfunktion 3. Grades kennt man den Tiefpunkt T(2/-1) und den Wendepunkt W(1,2). Ermittle die Funktionsgleichung, diskutiere die Funktion und fertige eine Zeichnung an.

Bisher war die Hauptarbeit zur Ermittlung der Funktionsgleichung das Lösen des zugehörigen Gleichungssystems. Das übernimmt jetzt das CAS als Black Box. Die Tätigkeit des Schülers konzentriert sich auf das eigentliche Ziel dieser Analysisaufgabe: **Das Modellbilden.**

```
                    3       2
#1:   F(x) := a*x  + b*x  + c*x + d                          User

      /d \1             2
#2:   |--|  F(x) = 3*a*x  + 2*b*x + c             User=Simp(User)
      \dx/

      /d \2
#3:   |--|  F(x) = 6*a*x + 2*b                    User=Simp(User)
      \dx/

                      2
#4:   F1(x) := 3*a*x  + 2*b*x + c                            User


#5:   F2(x) := 6*a*x + 2*b                                   User
```

Die eigentliche Modellbildungstätigkeit besteht im ermitteln der Zeile #6

```
#6:   [F(2) = -1, F(1) = 2, F1(2) = 0, F2(1) = 0]            User
```

Das Lösen übernimmt das CAS

$$\#7: \quad \left[a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{9}{2},\ c = 0,\ d = 5 \right] \qquad \text{Solve(\#6)}$$

Diese Aufgabe habe ich nicht ausgewählt, weil ich sie in einem computerunterstützten Mathematikunterricht der Zukunft für so wichtig halte, sondern um zu zeigen, wie sich die Schwerpunkte verschieben und was von den bisherigen Schülertätigkeiten übrig bleibt.

Über die Chancen, die die Verwendung von CAS für einen mehr anwendungsorientierten Mathematikunterricht bietet, müßte man ein eigenes Buch schreiben. In diesem Artikel war nur ein Aspekt wesentlich: Die Übernahme des **Operierens** durch das CAS als Black Box und die Forderung daß diese Box in vorhergehenden Lernphasen "white" gewesen sein sollte.

Einige Vorteile, die sich daraus für die Anwendungsphase ergeben:

Praxisnähere Daten.

Komplexere Operationen (der Schüler muß sie ja nicht ausführen).

Neue Arten von Modellen, wie etwa iterative Modelle

Neue Arten des Operierens, wie etwa Simulieren oder Visualisieren.

Vielseitigere Möglichkeiten des Interpretierens, vielseitige Testmöglichkeiten.

Mehr Schülerselbsttätigkeit, eigenständiges Aneignen heuristischer Strategien

3. ZUSAMMENFASSUNG

Im traditionellen Mathematikunterricht ist wahrscheinlich in allen Ländern der Welt die Rechenfertigkeit das dominierende Ziel. Immer dann, wenn in der Geschichte der Mathematik neue Rechenhilfsmittel oder neue Rechenverfahren entwickelt wurden, mußte die bis dahin forcierte Kalkülkompetenz überdacht werden. Nun sind wir wieder an so einem entscheidenden Punkt der mathematischen Entwicklung angelangt: Die Nutzung des Computers und insbesondere der Computeralgebrasysteme verlangt ein Überdenken der bisher im Mittelpunkt stehenden Rechenfertigkeiten.

Folgende Kompetenzen haben sich bei unseren Experimenten als wichtig erwiesen - man könnte sozusagen von einer **ALGEBRAISCHEN ALLGEMEINBILDUNG** sprechen:

Strukturerkennungskompetenz:
Sie ist bei der Entwicklung eines Terms, bei der Eingabe, bei der Entscheidung für eine bestimmte Operation und auch beim Interpretieren und Testen von Ergebnissen notwendig.

Äquivalenzerkennungskompetenz:
Besonders zu beachten ist die 'Schnittstelle' Operieren - Interpretieren: Der Schüler muß Ergebnisse interpretieren, die er nicht selber produziert hat. Oft liefert das CAS unerwartete Resultate und der Schüler weiß nicht, ob sie zu seinen erwarteten Ergebnissen äquivalent oder von diesen verschieden sind. Auch die individuellen Ergebnisse verschiedener Schüler beim experimentellen Lernen müssen oft im Bezug auf Äquivalenz überprüft werden. Daher müssen die Schüler Teststrategien zur Steigerung dieser Kompetenz entwikeln.

Grundgesetzanwendungskompetenz:

Gerade das White Box/Black Box Prinzip erfordert diese Begründungskompetenz in der White Box Phase als wesentlichen Bestandteil des verstehenden Lernens.

Elementare Kalkülkompetenz:

Einig sind wir nur, daß eine solche Kompetenz nach wie vor auch bei intensiver Nutzung von CAS notwendig ist, da ja sonst auch die Entscheidung für ein bestimmtes Modell, für eine bestimmte Operation oder für einen bestimmten Beweisschritt nicht möglich wäre. Wie aber diese Kompetenz im Detail aussieht, wissen wir auch noch nicht. Das wird noch Gegenstand vieler Untersuchungen und Diskussionen sein.

Testkompetenz:

Gerade beim, durch die Verwendung von CAS möglichen, experimentellen Lernen wird das Testen eine zentrale Tätigkeit. Auch die verstärkte Bedeutung des Modellbildens und des Interpretierens erfordert diese Kompetenz. Eine unstrukturierte Versuch- Irrtumsmethode führt aber kaum zum Ziel. Es ist die bewußte Aneignung heuristischer Teststragien seitens der Schüler notwendig.

Visualisierungskompetenz:

Das Prinzip der Anschaulichkeit ist nicht neu. Ohne Computer war das Veranschaulichen aber oft sehr aufwendig. Die Verwendung von CAS bietet für den Erwerb und die Nutzung dieser Kompetenz völlig neue Möglichkeiten. Visualisieren mit dem CAS ist nicht nur ein Beitrag zu einem besseren Verständnis, sondern stellt auch eine neue Form des Operierens dar und erlaubt ein besseres Interpretieren von Ergebnissen.

Abschließend eine kurze Zusammenfassung der

Veränderungen durch Computeralgebrasysteme

AUSFÜHREN	_	PLANEN, INTERPRETIEREN
REPRODUKTIVES LERNEN	_	SELBSTÄNDIGES, EXPERIMENTEL- LES LERNEN
STRATEGIEN ANWENDEN	_	STRATEGIEN ENTWICKELN
HANDKALKÜLWISSEN	_	STRATEGIEKALKÜLWISSEN
KOMPLEXERE KALKÜLFERTIGKEITEN	_	VERRINGERUNG DER KOMPLEXI- TÄT BEIM RECHNEN OHNE CAS
AUFGABEN	_	PROBLEME
KALKÜLORIENTIERT	_	ANWENDUNGSORIENTIERT
PRÜFUNGSSITUATION: ÜBERGEWICHT DER SCHUL- ARBEITEN	_	NEUE ÜBERPRÜFUNGSFORMEN BEWERTUNG VON PARNTER- UND TEAMARBEIT NEUE ARTEN VON AUFGABEN

LITERATUR

ASPETSBERGER, K./FUCHS, K./KLINGER, W.:
DERIVE Beispiele und Ideen für den Mathematikunterricht. ACDCA Report Nr. 2. Zentrum für Schulentwicklung Klagenfurt, 1994. (ISBN: 3-9500283-1-5)

BUCHBERGER, B.:
Teaching Math by Software. Paper of the RISC-Institut of the Johannes Keppler University Linz, 1992.

FISCHER, R./MALLE, G.:
Mensch und Mathematik. B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich 1985. (ISBN: 3-411-03117-4).

HEUGL, H.:
Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (Gymnasien) in Österreich. MU, Jahrgang 41, Heft 4, Juli 1995, S. 5 - 19.

LEHMANN, E.:
"Weniger rechnen - mehr verstehen: Lineare Gleichungssysteme im Grundkurs der Klasse 12 mit Derive." Vortrag bei der Tagung des Arbeitskreises "Mathematik und Informatik" in Wolfenbüttel, September 1995.

NOCKER, R.:
Studie: Veränderungen im Methodeneinsatz. ACDCA Report Nr. 3. Pädagogisches Institut Hollabrunn, Österreich, 1994.